

## محاولة رياضية

→ مسألة آخر محاضرة:

$$6x - x^2 \rightarrow \text{اكتمال مربع}$$

$$I = \int_3^{\infty} e^{6x - x^2} dx$$

(حذر الأول الإشارة  $\frac{1}{e}$  معامل الثاني)  $- (\frac{1}{e}$  معامل الثاني)

$$6x - x^2 = -[x^2 - 6x] = -[(x-3)^2 - 9]$$

$$I = e^9 \int_3^{\infty} e^{-(x-3)^2} dx$$

$$(x-3)^2 = t$$

$$x-3 = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$I = \frac{1}{2} e^9 \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{2} e^9 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^9$$

□ Lec 22

## Beta Function

$$\boxed{1} \quad \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$\boxed{2} \quad \beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

$$\boxed{3} \quad \beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

$$\boxed{4} \quad \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\boxed{5} \quad \beta(m, n) = \beta(n, m)$$

→ هذا الجزء يجعلنا نحسب التكاملات على الفور من  $(1 \leftarrow \infty)$   
بمجرد النظر يعني أنه

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = \beta(3, 4) = \frac{\Gamma(3) \Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{(2!)(3!)}{6!}$$

Lec 22  $\boxed{2}$

الأقمار

## الأفكار

1 حدود التكامل ليست صفر (0) و (1) و داخل القوس ليس (1-x) ← نجهز ما بداخل القوس ونجعله (رمز - 1) والرمز ليس له أس وليس له معاملات ونستخدم الهوية رقم (1).

2 دوال مثلثية ← نستخدم الهوية رقم (2)  $\int_0^\pi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$  إذا كانت الحدود  $\left( \int_0^\pi \right) \leftarrow$  إذا كان  $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$

(b) إذا تغيرت الزاوية نستخدم حساب المثلثات.

3 إذا كانت الحدود تتصوى على  $\infty$  نجهز ما بداخل القوس ونستخدم رقم (3).

Ex Evaluate

①  $\int_0^1 x^4 (1-x)^8 dx$

②  $\int_0^1 (x^3 - \sqrt{x})^2 (\sqrt{1-x}) dx$

③  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx$

④  $\int_0^4 x^2 \sqrt{4-x} dx$

⑤  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$

⑥  $\int_2^5 (x-2) \sqrt{5-x} dx$



$$\textcircled{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta}}$$

$$\textcircled{8} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$\boxed{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2n! \pi}{2^n (n!)^2 * 2} & ; p=2n \\ \frac{n 2^{2n-1} (n!)^2}{2n!} & p=2n-1 \end{cases}$$

$p \geq 0$

Sol

$$\boxed{1} \quad m-1=4 \quad , \quad n-1=8 \Rightarrow m=5, n=9$$

$$I = \beta(5, 9) = \frac{\Gamma(5) \Gamma(9)}{\Gamma(14)} = \frac{4! \cdot 8!}{13!}$$

$$\boxed{2} \quad I = \int_0^1 (x^6 - 2x^{\frac{7}{2}} + x) (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{x^6 (1-x)^{\frac{1}{2}}}_{m=7, n=\frac{3}{2}} dx - \int_0^1 \underbrace{2x^{\frac{7}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}}_{m=\frac{9}{2}, n=\frac{3}{2}} dx + \int_0^1 \underbrace{x (1-x)^{\frac{1}{2}}}_{m=2, n=\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma(7) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{17}{2})} - 2 \frac{\Gamma(\frac{9}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(6)} + \frac{\Gamma(2) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})}$$

Lec 4 4

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{105 \sqrt{\pi}}{16}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{15 \sqrt{\pi}}{8}$$

$$\Gamma\left(\frac{17}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}\right) \left(\frac{13}{2}\right) \left(\frac{11}{2}\right) \left(\frac{9}{2}\right) \frac{105 \sqrt{\pi}}{16}$$

$$\Gamma(7) = 6! \quad \Gamma(6) = 5! \quad \Gamma(2) = 1!$$

\* بالتعريف

$$\boxed{3} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} (1-x)} \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

كل

$\boxed{5}$  Lec 22

$$\textcircled{4} \int_0^4 x^4 \sqrt{4-x} \, dx$$

$$I = 2 \int_0^4 x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$t = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4t \quad , \quad dx = 4 \, dt$$

$$\text{at } x=0 \longrightarrow t = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{at } x=4 \longrightarrow t = \frac{4}{4} = 1$$

$$I = 2 \int_0^1 16 t^2 (1-t)^{\frac{1}{2}} 4 \, dt$$

$$= 128 \int_0^1 t^2 (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt = 128 \, B\left(3, \frac{3}{2}\right)$$

$$= 128 \frac{\Gamma(3) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{(128)(2!)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\boxed{5} \text{ Put } t = x^n$$

متعلق البنية

$$\boxed{6} \text{ Lec 22}$$



$$\boxed{6} \quad I = \int_2^5 (x-2) \sqrt{5-x} \, dx$$

$$t = x - 2 \rightarrow x = t + 2 \rightarrow dx = dt$$

~~$$I = \int_2^5 (x-2) \sqrt{5-x} \, dx$$~~

$$x=2 \rightarrow t=0$$

$$x=5 \rightarrow t=3$$

$$I = \int_0^3 t \sqrt{5-t-2} \, dt = \int_0^3 t \sqrt{3-t} \, dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^3 t \left(1 - \frac{t}{3}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$y = \frac{t}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} t=0 \rightarrow y=0 \\ t=3 \rightarrow y=1 \end{array}$$

~~$$I = \sqrt{3} \int_0^1 y (1-y)^{\frac{1}{2}} dy$$~~

$$I = 9\sqrt{3} \int_0^1 y (1-y)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 9\sqrt{3} \, B\left(2, \frac{3}{2}\right) = 9\sqrt{3} \frac{\Gamma(2) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})}$$

$$\boxed{7} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \cos^{\frac{-1}{2}} \theta$$

$$2m-1 = \frac{3}{2}$$

$$2n-1 = \frac{-1}{2}$$

$d\theta$

$$\boxed{8} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^4)} \Rightarrow \text{Put } x^4 = y$$

$$\boxed{9} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \theta \cos^n \theta d\theta$$

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

$$2m-1 = p \quad (2n-1 = 0)$$

$$m = \frac{p+1}{2} \quad (n = \frac{1}{2})$$

$$I = \frac{1}{2} \beta \left( \frac{p+1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$\boxed{8}$  Lec 22



$$I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}$$

$$p = 2n$$

$$I = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{n!} \rightarrow (1)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \left(\frac{2n-3}{2}\right) \left(\frac{2n-5}{2}\right) \dots \sqrt{\pi}$$

حيث نكتب في المقام  $2n!$  نضرب في الحدود الناقصة ببساطة ومقابلة.

$$= \frac{2n}{2n} \left(\frac{2n-1}{2}\right) \left(\frac{2n-2}{2n-2}\right) \left(\frac{2n-3}{2}\right) \left(\frac{2n-4}{2n-4}\right) \dots \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{2n! \sqrt{\pi}}{2^n \times 2^n \times n(n-1)(n-2) \dots}$$

$$= \frac{2n! \sqrt{\pi}}{2^n n!}$$

بالعقوبة في (1)

[9] Lec 22

بالتعويض في (1)

$$I = \frac{(2n!) \pi}{2^{2n} (n!)^2} \rightarrow \neq [a]$$

$$p = 2n - 1$$

$$I_2^p = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

نعم حسابنا في النتيجة السابقة

$$I_2 = \frac{(n-1)! \sqrt{\pi}}{2 (2n!) \sqrt{\pi}} \times 2^{2n} \times n!$$

← باقي في هذا الجزء أ ~ نتعرف على أسلوب استنتاج الصور  
4, 3, 2 في (1).

**Ex: 1** show that  $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$

**Sol**

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

Let  $x = \sin^2 \theta$  ,  $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

$$\text{at } x=0 \rightarrow \theta=0$$

$$\text{at } x=1 \rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{m-1} (1 - \sin^2 \theta)^{n-1} * 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

(Ex:2) show that  $\beta(m, n) = \int_0^1 \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dx$

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

أسلوب التفكير نريد جعل الحدود القدية كالحدودية حتى نتمكن  
 من أخذ  $\infty$  لا بد أن نأخذ تعويضاً

$$x = \frac{y}{1+y}$$

الرقم  $\frac{\text{رقم}}{1+\text{رقم}}$  يعطى (1) وهذا لا يمكن حركته إلا إذا كان  
 الرقم  $(\infty)$

$$\text{at } x=0 \Rightarrow 0 = \frac{y}{1+y} \Rightarrow y=0$$

$$\text{at } x=1 \Rightarrow 1 = \frac{y}{1+y} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{1+y} = 1$$

$$\Rightarrow y \rightarrow \infty$$



$$dx = \frac{(1+y)(1) - y(1)}{(1+y)^2} dy = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}} \left(1 - \frac{y}{(1+y)}\right)^{n-1} \times \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$\frac{1+y-y}{1+y} \rightarrow \left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} dy}{(1+y)^{m-1+n-1+2}}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

12

Levi